L'amore di uno studente per la matematica

di Simone Perrone

INTRODUZIONE

Questo articolo ha l'obiettivo di far comprendere l'importanza che ha la matematica nel mondo scientifico, la motivazione che ha portato a definirla ''scienza esatta'' e le intuizioni avute dai suoi maggiori esponenti alla base della produzione dei loro lavori. Ma anche mettere luce sul lavoro che vi è alle spalle della formulazione di un teorema, relazione o legge fisica, il quale spesso non viene visto ma che in realtà esiste. Infine viene trattata una piccola parte in cui viene messa in risalto l'importanza, in modo diretto con l'utilizzo di esempi, che ha la matematica nelle altre scienze e, quindi, nella realtà.

La matematica è lo strumento più adatto per lavorare con i concetti astratti di qualunque sorta, e il suo potere in questo campo è illimitato. Per questa ragione un libro sulla nuova fisica, se non si limita alla descrizione degli esperimenti, deve essere essenzialmente matematico.

Paul A.M. Dirac
Quantum Mechanics, 1930

Referente Prof. Luca Paladino
Prof.ssa Rosa Tullio

I.T.I. GALILEO FERRARIS

Napoli

La matematica è quella scienza tanto detestata quanto amata; è la regina di tutte le scienze, colei che ci ha dato modo di descrivere e formalizzare attraverso un linguaggio i fenomeni fisici che governano il nostro mondo e l'universo. Ogni fenomeno fisico è descritto da una relazione matematica: dalla legge di gravitazione universale formulata da Newton; le leggi di Keplero; la caduta di un grave la quale è descritta da una parabola; la legge di Ohm che è alla base dell'elettronica che lega le tre grandezze fondamentali quali tensione, corrente e resistenza; le note ed importantissime equazioni di Maxwell che descrivono le leggi fondamentali che governano l'interazione elettromagnetica; sino alla celebre legge della conservazione della massa e l'energia sviluppata da Einstein.

Insomma, come si può dedurre da questo numero esiguo di esempi presi in esame, la matematica è alla base di tutto: dalla fisica, alla chimica, all'informatica, all'ingegneria, alla medicina sino alla musica.

Essa risulta essere caratterizzata da una certezza assoluta: ciò che è provabile matematicamente può essere migliorato, contestualizzato o generalizzato, ma non può essere confutato e messo in dubbio se retto da una ''**dimostrazione**''. Cos'è una dimostrazione matematica? E' un processo deduttivo che permette di verificare la validità dell'enunciato di un teorema, e che prevede di mostrare che la validità delle ipotesi portino alla validità della tesi.

Tutti i teoremi, così come lo sono le relazioni matematiche note, sono provate attraverso un processo di dimostrazione. Non poco spesso accade che delle leggi, dei teoremi, delle formule ci vengano proposte come delle verità assolute sulle quali fare affidamento senza, però, sapere del perché possiamo darle per vere e soprattutto senza conoscere l'immenso lavoro che vi è stato dietro la loro scoperta e formulazione.

I.T.I. GALILEO FERRARIS

Napoli

E’ nel IV secolo a.C. che Pitagora, noto scienziato Greco, ha mosso i primi passi per l’affermazione di una scienza dimostrativa. Prima di lui non si era capito chiaramente che le dimostrazioni devono procedere a partire da assunzioni e la matematica, a quei tempi prevalentemente trattata nel ramo della geometria, consisteva in gran parte da un’insieme di regole pratiche empiriche senza alcuna connessione tra di loro. Fu proprio grazie a Pitagora che si comprese la necessità della presenza di un processo dimostrativo che provasse la veridicità di una propria tesi e dell’introduzione, nel caso della geometria, di postulati.

All’illuminato e geniale scienziato che mise le fondamenta non solo per lo sviluppo successivo della geometria ma per l’evoluzione a 360° del pensiero logico-intuitivo, si affiancano nel corso dei secoli e dei millenni altre figure di spicco che relativamente al proprio periodo storico in cui hanno vissuto hanno apportato contributi considerevoli al mondo della scienza: Newton, Einstein, Archimede, Leibniz, Lagrange, Laplace, Gauss, Riemann, Eulero, Dirac...

I.T.I. GALILEO FERRARIS

Napoli

Questo numero, pur se esiguo, di menti eccelse di predisposizione matematica sono accomunate, nonostante i periodi storici divergenti tra di loro, da una caratteristica fondamentale: avere un ragionamento logico-intuitivo, ovvero matematico. Grazie a quest'ultimo e alle meravigliose e apparentemente ma non semplici intuizioni che hanno portato alla formulazione di teorie, leggi, formule e teoremi il mondo è cambiato e si è evoluto nel corso dei secoli e millenni fino ai giorni nostri.

Nella nostra epoca diamo quasi per scontato la validità di un teorema matematico, una legge fisica, una formula, quali possono essere il celebre ''Teorema di Pitagora'' appartenente al matematico che ha aperto questo paragrafo; la legge di gravitazione universale formulata dal matematico e fisico Isaac Newton e la teoria della relatività di Einstein. Ma qual è tutto quel lavoro ''nascosto'' che c'è dietro questi straordinari risultati? E quali sono le intuizioni che hanno avuto questi geni? Molto spesso gli avvenimenti storici sono caratterizzati dalla presenza di leggende.

Ma grazie allo studio e alla ricerca di accurati storici e di studiosi della storia della matematica si è riuscito a ricostruire con una buona accuratezza le reali vicende che risiedono dietro quasi ogni meravigliosa scoperta.

Per comprendere, pur se in maniera approssimativa, l’immenso lavoro e le intuizioni che hanno avuto i grandi dell’epoca possiamo far riferimento a questi tre grandi personalità e le loro scoperte più imponenti:

- Come non menzionare il teorema di Pitagora. Lo scienziato Greco pare abbia formulato il suo teorema mentre stava aspettando un'udienza. Seduto in un grande salone di un palazzo, si mise ad osservare le piastrelle quadrate del pavimento, si pensa che ne abbia vista una rotta perfettamente su una diagonale, così da formare due triangoli rettangoli uguali, anche isosceli, avendo i due lati uguali. Pitagora immaginò un quadrato costruito sulla diagonale di rottura della piastrella, un quadrato avente come lati le diagonali delle piastrelle circostanti;

- Proseguiamo con Newton che, invece, pare abbia scoperto la famosa ''legge della gravità'' seduto sotto ad un albero in meditazione durante la quale venne colpito da una mela caduta dall'albero. Quindi ipotizzò l'esistenza di una "forza invisibile" che attraeva la mela al centro della Terra. Solo dopo circa vent'anni di lavori durante i quali attuò un numero considerevole di esperimenti e la formulazione di ulteriori ipotesi, come quella sulla crepuscolarità della luce, Newton enunciò la legge di gravitazione universale. La quale sarà poi dimostrata solo due anni dopo nella sua opera Principia considerata una dei più grandi trattati scientifici mai scritti nella storia della scienza;
- Siamo ancora nel mondo della fisica arrivando ad una figura più recente, Albert Einstein il quale nel secolo scorso ha letteralmente scosso il mondo scientifico con la formulazione della sua celebre teoria della relatività.

Suddivisa in due distinti modelli matematici, relatività ristretta e relatività generale, essi vengono pubblicati in degli articoli rispettivamente nel 1905 e nel 1915.
Nel secolo scorso la fisica era divisa di fronte a due tipi di trasformazione: quelle di Galileo, valide in meccanica classica, e quelle di Lorentz, valide per l'elettromagnetismo ma prive di un supporto teorico convincente. La situazione era molto insoddisfacente perché queste trasformazioni erano incompatibili tra loro. Pertanto Einstein sentì l'esigenza di intervenire per mettere ''ordine'' e lo fece formulando la teoria della relatività ristretta. Dalla relatività ristretta tuttavia emerge anche l'insuperabilità della velocità della luce. Che, a sua volta, è in contraddizione con la teoria della gravitazione universale di Newton, secondo la quale le masse esercitano un'azione istantanea le une sulle altre. Arriviamo così ad un lavoro basato su intuizioni, sperimentazioni ed ipotesi durato ben 10 anni: la relatività generale. Egli per uscire da questa non banale difficoltà, elaborò l'equazione di campo che rivoluzionava completamente il concetto di gravità, legandola alla geometria dello spazio e del tempo.

Dalla trattazione di queste tre figure e le storie che vi sono dietro la formulazione delle loro scoperte più celebri, possiamo osservare che alle loro spalle vi è nella realtà dei fatti un lavoro immenso basato su sperimentazioni, osservazioni e uno studio protratto spesso per anni. Da non trascurare è uno degli argomenti che costituisce il nucleo generativo di questo articolo: le meravigliose intuizioni che hanno avuto questi scienziati alla base delle loro successive scoperte. Quanto può essere affascinante che un legge così importante come quella della gravità, che descrive uno dei principali principi fisici del nostro universo, sia stata dedotta dalla ‘’banale’’ caduta di una mela da un albero?; oppure la meraviglia che risiede dietro la formulazione di un teorema quale può essere quello di Pitagora, dedotto a partire dall'osservazione delle piastrelle in un palazzo? Ma, pur correndo il rischio di risultare ripetitivo, quanto è bello e stupefacente che la matematica ci permette di descrivere con un linguaggio universale e in maniera del tutto precisa e genuina queste nostre intuizioni e scoperte, ciò che ci circonda?

Di seguito sono riportate una serie di dimostrazioni di teoremi e relazioni, tra le mie preferite, che potrebbero generare nel lettore un sentimento di curiosità nella conoscenza del lavoro effettuato e delle intuizioni che hanno avuto i creatori di queste ultime che sono alla base della loro formulazione:

TEOREMA DI LAGRANGE

Enunciato: *sia f:[a,b]→$\Re$ una funzione continua nell'intervallo chiuso [a,b] e derivabile nell'intervallo aperto (a,b). Allora esiste un c $\in$ (a,b) t.c:*

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Dimostrazione: partendo dalle suddette ipotesi, consideriamo la funzione

$$F(x) f(x) - kx$$

Determiniamo k in modo che *f(x)* soddisfi la terza ipotesi del teorema di Rolle:

$$F(a) = F(b) \Rightarrow f(a) - ka = f(b) - kb \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow k(b-a) = f(b) - f(a) \Leftrightarrow k = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Sostituendo k nella funzione considerata inizialmente si ottiene:

$$(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} x$$

La quale soddisfacendo le ipotesi del teorema di Rolle si ha che *esiste un* $c \in (a,b)$ *t.c:* $F'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$

Ovvero:

C.V.D.

FORMULA DI EULERO PER I NUMERI COMPLESSI

Afferma che *sia* $z \in \mathfrak{C}$ *t.c.* $z = a + ib$ *con* a, $b \in \mathfrak{R}$ *e sia* $\lambda = \sqrt{a^2 + b^2}$ *il modulo e* η *l'angolo che il vettore associato forma con l'asse reale*, allora si ha che per ogni $\eta \in \mathfrak{R}$ vale l'identità:

$$e^{i\eta} = cos\eta + isen\eta$$

DIMOSTRAZIONE

Ci sono vari modi per dimostrarla, ma prendo in esame quella più comunamente adottata che fa uso dello sviluppo in serie di Taylor della funzione esponenziale, della funzione coseno e della funzione seno.

Sviluppo in serie della funzione coseno:

$$cos z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n!} x^{2n} = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \frac{z^6}{6!} + \dots$$

Sviluppo in serie della funzione seno:

$$sen z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1} = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \frac{z^7}{7!} + \dots$$

Sviluppo in serie della funzione esponenziale:

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} = 1 + \frac{z^1}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \dots$$

Ponendo $z=i\eta$ si ottiene

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(i\eta)^n}{n!} = 1 + i\eta\text{-} + \frac{i^2\eta^2}{2!} + \frac{i^3\eta^3}{3!} + \frac{i^4\eta^4}{4!} + \frac{i^5\eta^5}{5!} + \dots\text{-} =$$

$$= \left(1 - \frac{\eta^2}{2!} + \frac{\eta^4}{4!} - \frac{\eta^6}{6!} + \dots\right) + i\left(\eta - \frac{\eta^3}{3!} + \frac{\eta^5}{5!} - \frac{\eta^7}{7!} + \dots\right) =$$

$$= \cos\eta + i\sin\eta$$

C.V.D.

FORMULA RISOLUTIVA DELLE EQUAZIONI DIFFERENZIALI LINEARI DEL PRIMO ORDINE NON OMOGENEE

Consideriamo la forma generalizzata di questo tipo di equazioni: *y'=a(x)y+b(x)*; (1)

Inoltre consideriamo il caso in cui *b(x)* sia nullo e supponiamo *y>0*: *y' = a(x)y*; (2)

Ricordando che $y' = \frac{dy}{dx}$ sostituendo in (2) segue che:

$$\frac{dy}{dx} = a(x)y \Leftrightarrow \frac{1}{y}dy = a(x)dx \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \int \frac{1}{y}dy = \int a(x)dx \Leftrightarrow ln(y) = A(x) + c \Leftrightarrow y = ke^{A(x)}$$

Consideriamo la costante k variabile rispetto alla variabile x, ovvero k(x).

Se $y = k(x)e^{A(x)} \Rightarrow y' = k'(x)e^{A(x)} + k(x)a(x)e^{A(x)}$

Sostituendo in (1) si ottiene la formula risolutiva:

$$k'(x)e^{A(x)} + k(x)a(x)e^{A(x)} = a(x)k(x)e^{A(x)} + b(x) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow k'(x) = \int b(x)e^{-A(x)}dx = \int b(x)e^{-\int a(x)dx}dx$$

Da cui sostituendo si ha che

$$y = e^{\int a(x)dx}\left[\int b(x)e^{-\int a(x)dx}dx + c\right]$$

C.V.D.

I.T.I. GALILEO FERRARIS

Napoli

Ho scelto queste tre dimostrazioni poiché sono state, in special modo le prime due riportate, lo stimolo che ha fatto nascere in me una sete di conoscenza verso la provenienza di questa notevole mole di teoremi, formule e leggi che da anni consideravo come verità assolute senza però saperne il motivo effettivo. Questa mia curiosità nella conoscenza di questi particolari non è nata per puro caso, ma bensì dallo studio più approfondito della matematica e dalla voglia di dare un ‘’senso’’ a quello che trattavo e studiavo. Solo a questo punto, prendendo in considerazione le dimostrazioni elencate poc’anzi, ho cominciato e tutt’ora continuo a pormi delle domande quando mi accingo nella lettura dell’enunciato di un teorema, una relazione o una legge fisica:

- Consideriamo l’enunciato del Teorema di Lagrange e la relativa dimostrazione. Le ipotesi e la tesi sono ben definite e chiare: ma qual è l’intuizione logica a monte che ebbe il matematico Lagrange e il lavoro che attuò per arrivare alla conclusione di dover considerare proprio la funzione $f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} x$?

- Consideriamo la formula di Eulero per i numeri complessi. Dire che questa formula sia bellissima, oltre che utile e funzionale, è riduttivo. Ma qual è l'intuizione logica che ebbe Eulero nel considerare un'esponente quale ? E anche in questo caso, qual è stato il lavoro alle spalle della formulazione di questa relazione?

- Infine trattiamo l'ultimo caso considerando il processo dimostrativo che ci permette di ricavare la formula risolutiva delle equazioni differenziali del primo ordine non omogenee: qual è l'intuizione che ebbero i matematici di dover considerare la k, inizialmente una funzione costante, una funzione variabile rispetto alla variabile x?

CONCLUSIONI

Quasi la totalità dei concetti matematici trova in qualche modo applicazione nelle altre discipline in campo scientifico le quali ne usufruiscono, come fanno la fisica e l'ingegneria, per descrivere i fenomeni attorno a noi nel caso del fisica e per la progettazione di dispositivi nel caso dell'ingegneria. Possiamo convincerci dell'importanza e del ruolo che ha la matematica in tutto questo considerando una serie di possibili applicazioni alla realtà che coinvolgono proprio il teorema, la relazione e la formula risolutiva considerati poco fa:

- Il teorema di Lagrange è alla base del sistema di controllo della velocità "Safety Tutor" sulle autostrade, utilizzato per la misurazione della velocità media tenuta dai veicoli lungo un determinato tragitto;
- La relazione di Eulero è ampiamente utilizzata in campo elettrico attraverso il metodo simbolico il quale trasforma grandezze quali corrente e tensione nel rispettivo fasore, ovvero un'onda che descrivere l'andamento nel tempo di queste grandezze che sono presenti in realtà;

- Infine vi è la formula risolutiva che ha il compito di fornirci la soluzione dell'equazione differenziale considerata. Le equazioni differenziali sono largamente utilizzate campo scientifico: per esempio nella teoria dei sistemi è possibile associare ad un sistema, che è l'insieme di grandezze fisiche che interagiscono tra di loro per il funzionamento di un qualcosa di reale, la rispettiva equazione differenziale che descrive il suo comportamento al variare del tempo o della frequenza.

E' questa la matematica, la regina di tutte le scienze. Docile ma ribelle; serena ma tempestuosa.
A suo proposito lo scrittore Enrico Galiano affermava qualche anno fa che: «Con i numeri me la cavo bene. Di loro mi piace che non si spostano. Vai, torni, e loro sono sempre lì. Sono affidabili, ecco. Per questo amo la matematica»
Ma d'altronde, come non amare la matematica?