I paradossi di Zenone tra Filosofia e Matematica

A cura degli studenti di 5° M e 5° N dell'ITI Ferraris di Napoli:

Anastasio Luca, Autiero Fabio, Brillante Antonio, Castiello Mattia, Esposito Flavio, Esposito G. Paolo, Giordano Mattia, Giordano Vincenzo, Gravante Daniele, Liguori Salvatore, Marano Felice, Napolano Gianluca, Ponticiello Mario, Pozzone Alfonso, Quattromani Francesco, Russo Christian, Sodano Francescopio, Varuni Giovanni

Coordinati dai proff. **Alessandra Fogliano e Giuseppe Mangione**

Abstract: *Rivisitazione, in chiave "teatrale", del dibattito filosofico-matematico sul paradosso di Zenone "Achille e la tartaruga". La critica di Aristotele, la soluzione matematica di Leibniz e le posizioni di pitagorici e atomisti sui concetti di infinito, continuo e discontinuo.*

1 -Introduzione

Negli istituti tecnici lo studio della matematica è finalizzato alle applicazioni pratiche, ma sappiamo anche che la matematica e la logica sono alla base delle discipline informatiche che fanno parte della nostra specializzazione.

Per questo ci siamo appassionati a un modo diverso di intendere la matematica, collegandola ad alcune nozioni di filosofia, che da noi non si studia come materia ma che da qualche anno è stata introdotta nei progetti che la scuola ci offre.

I professori Alessandra Fogliano (matematica) e Giuseppe Mangione (filosofia) ci hanno illustrato, con le loro lezioni, come un problema nato in un ambito filosofico sia stato risolto attraverso la matematica.

Dal lavoro svolto insieme ai professori, ci è venuta l'idea di rappresentare la questione attraverso la costruzione di un testo teatrale, immaginando i vari personaggi storici che esponevano i loro punti di vista e le loro teorie.

Quello che presentiamo di seguito è il testo che abbiamo prodotto, inteso come un vero e proprio "copione", che abbiamo "rappresentato" in occasione dei convegni ***"Due giornate per la scuola"*** (Napoli, 18 marzo 2022, ITI Ferraris) e "***Studenti in cattedra, docenti nei banchi"*** (Castellammare di Stabia, 27 maggio 2022, Liceo scientifico Severi).

2 - Storia di un "paradosso"

Personaggi e interpreti (in ordine di apparizione) *

Primo Narratore: Gianluca Napolano

Archippo (*il pitagorico*): Salvatore Liguori

Parmenide d'Elea: Daniele Gravante, Felice Marano

Zenone d'Elea: Luca Anastasio, Francescopio Sodano, Vincenzo Giordano, Francesco Quattromani

Secondo narrratore : Antonio Brillante, Christian Russo

Aristotele: Alfonso Pozzone

Democrito di Abdera: Mario Ponticiello, Mattia Giordano, Mattia Castiello

Terzo narratore: Giuseppe Paolo Esposito, Fabio Autiero

Gottfried W. Leibniz: Flavio Esposito

Quarto narratore: Giovanni Varuni

* Alcuni personaggi sono stati interpretati da più studenti nelle diverse rappresentazioni

Primo Narratore Nel nostro lavoro vedremo come la matematica abbia risolto un problema che si è presentato molti secoli prima, in un contesto di pensiero filosofico e accenneremo a come quel problema, ancora oggi, fornisce lo spunto per ragionare di questioni che investono le ultime frontiere della fisica teorica.

La nostra storia inizia nelle colonie greche della Ionia del VII secolo a.C, dove i primi filosofi e fisici di Mileto (Talete, Anassimandro, Anassimene), cominciarono a pensare che la realtà può essere indagata con un nuovo metodo che non sia quello del mito: la ragione comincia a spiegarsi i fenomeni a partire da se stessa, senza far ricorso a cause divine, coniugando esperienza e ragionamento, passando dall'analisi dei casi particolari alla formulazione di tesi generali. Tutto questo avvenne (in continuità questa volta col mito) all'interno di una visione della realtà considerata come un tutto, riconducibile a un principio unitario originario (*arché*, in greco). La riflessione filosofica e scientifica si sviluppò poi nelle città italiane della Magna Grecia, dove nacquero la scuola pitagorica e quella eleatica; proprio da quest'ultima proviene il protagonista principale della nostre storia, Zenone d' Elea.

Ma andiamo per ordine e immaginiamoci un confronto ideale tra personaggi dell'epoca, che ci raccontano in prima persona gli aspetti principali delle loro idee e i termini della questione specifica che tratteremo.

Archippo Che gli Dei siano con voi gentile pubblico! Sono Archippo e fui allievo di Pitagora alla scuola di Crotone. Dopo la distruzione della scuola fui costretto a fuggire e a fondarne una nuova a Taranto. Infrango le regole del maestro, che ci imponevano di non rivelare la dottrina ai non adepti, solo perché appartenete ad un altro secolo e siete per la maggior parte dei matematici. Infatti Pitagora divideva i discepoli tra *acusmatici,* ammessi all'ascolto delle lezioni, e *matematici* (da *manthàno*, apprendere) che approfondivano la dottrina ed erano tenuti al segreto. Egli fu anche il primo a fare uso del termine *filosofia*, come sapere distaccato e contemplativo, come diceva spesso: "*I migliori alla festa vengono da spettatori*".

Noi pitagorici pensiamo che i *numeri* siano i principi primi di spiegazione della realtà, cioè che le leggi che regolano i rapporti tra i numeri spiegano anche i rapporti tra le cose reali e quindi che *la matematica* sia la forma piú alta di conoscenza. Come in matematica esiste l'opposizione tra le due serie fondamentali di numeri, pari e dispari, così tutta una serie di *coppie di opposti* regolano la vita del mondo naturale e della società umana. La nostra è una matematica del discontinuo, che tiene saldamente legate aritmetica e geometria; anzi vi confesso che avemmo problemi con un nostro allievo, Ippaso di Metaponto, che voleva diffondere pericolose scoperte sull' incommensurabilità tra diagonale e lato del quadrato.

Ma meglio non approfondire questo discorso, visto che vedo avvicinarsi le sagome di Parmenide e del suo allievo Zenone, i quali vanno diffondendo una strana teoria sull'unicità dell'essere che mal si concilia con la nostra idea della molteplicità. Vi lascio con loro e sarete bravi se ci capirete qualcosa, non vi nascondo che quelli di Parmenide, a volte, mi sembrano i vaneggiamenti di un folle.

Parmenide Salute a voi cari conterranei, perché io Parmenide e il mio allievo Zenone veniamo dalla stessa vostra terra, che oggi chiamate Campania e la nostra città, Elea, che sarà Velia per i romani, è la stessa Ascea dove molti di voi vanno a trascorrere le vacanze, ignari del fatto che su questi lidi sono nati la logica e quella parte della filosofia che si definisce ontologia o scienza dell'essere, di cui io, Parmenide, sono, modestamente, il "padre", avendo affermato, con la mia dottrina secondo cui *l'essere è il non essere non è,* il fondamentale principio di non contraddizione e avendo negato la pensabilità del nulla.

So che molti mi ritengono un folle che nega l'evidenza del moto e della molteplicità, ma si ingannano. Io ho solo preteso che la ragione distingua quando analizza la realtà come *un tutto*, cioè l'essere (*ciò che è*) rispetto a quando indaga le "*cose che sono*" nella loro specificità.

Se vogliamo cogliere l'essenza della realtà non possiamo limitarci a ciò che ci indicano i sensi; anche le teorie dei vostri fisici contemporanei ci invitano a fare ciò: ho letto di recente un libro divulgativo di un vostro collega professore, Carlo Rovelli, che s'intitola "*La realtà non è come ci appare*", che potrebbe ben essere il titolo di una mia opera, anche se io, veramente, scrivevo in versi. Comunque io non mi discosto dall'intuizione fondamentale dei pensatori ionici che vedevano la realtà come un *tutto omogeneo*, uno, eterno e continuo, al cui interno soltanto hanno un senso i molteplici fenomeni e anche io parto dall'assunto che *nulla può nascere dal nulla*. Infatti il vero metodo scientifico riduce gli enti, e arriva all'uno: *già 2 enti implicherebbero la nascita dal nulla*. Mi accusano anche di negare il movimento, ma in mia difesa su questi argomenti chiamo il mio migliore allievo Zenone che, come capacità dialettica, si può ben dire che abbia superato di gran lunga il maestro.

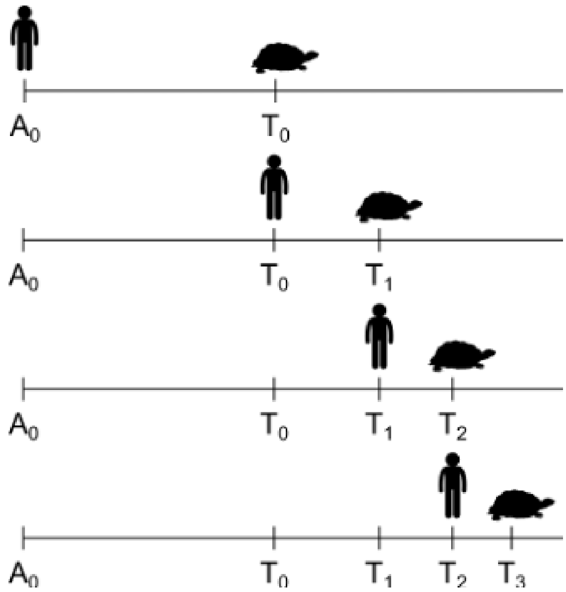
Zenone Non sia mai detto Maestro! Io mi sono solo limitato a difendere le tue tesi dalle ridicolizzazioni che ne facevano i tuoi avversari, quando definivano assurde le conclusioni a cui si giunge se si accetta l'idea dell'unicità dell'essere e li ho ripagati della stessa moneta, dimostrandogli che se si accetta la tesi della molteplicità degli enti si arriva a conclusioni ancora più ridicole.

So bene che le questioni di cui ho trattato hanno stimolato ancora per secoli le menti di matematici e filosofi e so anche che per questo sono stato definito l'inventore della dialettica e della dimostrazione per assurdo e i miei ragionamenti sono passati alla storia come "i paradossi di Zenone d'Elea".

Quel filosofo stagirita Aristotele, alle cui parole per più di mille anni voi avete creduto come si crede alle parole di un dio, vi tramandò quattro dei miei "ragionamenti"; ma vi assicuro che io ne scrissi più di quaranta. Comunque per evidenti ragioni mi limiterò qui ad esporvene solo uno, che dà un'idea precisa del discorso generale che intendevo fare: è quello che tutti chiamano il paradosso di ACHILLE E LA TARTARUGA.

Innanzitutto dovete convenire con me che se solo ammettiamo l'esistenza della più piccola molteplicità, cioè l'esistenza di due enti, dobbiamo ammettere l'esistenza di una molteplicità infinita, infatti come ho scritto nella mia opera "*Se gli enti sono molti, devono essere limitati. Ma se sono limitati , tra essi li ve ne sono altri, e in tal modo devono essere di necessità illimitati*". Se la realtà è molteplice, allora è continua ed infinitamente divisibile e ora vi dimostro che, se è continua ed infinitamente divisibile non ci può essere movimento.

Immaginiamo che Achille, piè veloce, faccia una gara di corsa con una tartaruga e, considerando la lentezza dell'animale, conceda sportivamente un vantaggio su di lui, ebbene dimostrerò che il nostro eroe non riuscirà mai a raggiungerla perché non raggiungerà mai il punto in cui essa si trova, visto che nel frattempo la tartaruga si sarà anch'essa spostata di una distanza minima che la separerà dal punto in cui si trovava prima e Achille dovrà di nuovo raggiungerla, ma nel frattempo essa si sarà ancora spostata, anche se di poco, e Achille dovrà nuovamente raggiungerla. E così via all'infinito.



Analizziamo meglio il paradosso utilizzando dei dati numerici per le velocità dei due contendenti: supponiamo che Achille conceda 10 metri di vantaggio alla tartaruga e che il nostro eroe percorra 10 metri al secondo, e la tartaruga solo uno. Allora Achille impiegherà un secondo per portarsi in T_0,

ed in quel tempo la tartaruga percorrerà un metro (cioè la distanza T_1-T_0). Poi Achille impiega 0,1 secondi per arrivare in T_1, mentre la tartaruga percorre 0,1 metri arrivando in T_2.

La situazione ai passi successivi è esemplificata dalla seguente tabella:

Percorso di Achille	Tempo	Distanza
A_0 - T_0	1 sec	10 m
T_0 - T_1	0,1 sec	1 m
T_1 - T_2	0,01 sec	0,1 m
T_2 - T_3	0,001 sec	0,01 m
…	…	…

Se vogliamo sapere dopo quale distanza Achille raggiungerà la tartaruga, dovremo sommare tutti i termini (infiniti) che appaiono nella terza colonna, ossia calcolare la somma degli infiniti termini

10+1+0,1+0,01+0,001+.. .. .. ..

Sarete d'accordo con me che, poiché la somma di infinite grandezze non nulle risulta infinita, Achille non raggiungerà mai la tartaruga.

Ciò quindi mostra che se ammettiamo che la realtà è continua ed infinitamente divisibile giungiamo alla conclusione assurda che il movimento sia un'illusione.

Secondo narratore Le antinomie di Zenone acuirono la diffidenza dei greci nei confronti del concetto di infinito e ribadirono la difficoltà di tenere insieme geometria e aritmetica . Il rapporto tra continuo e discontinuo resterà, per tutta la storia del pensiero umano, un problema molto difficile e molto dibattuto: anzi verrà considerato come uno dei più astrusi "labirinti" della ragione. E verrà risolto, nei suoi aspetti matematici, come vedremo più avanti, soltanto nel XVII secolo.

Ma prima di parlarvi di questo, vediamo come due altri grandi filosofi greci si posero rispetto alla questione dell'infinito. Vedo infatti avvicinarsi due figure e mi sembrano proprio loro, Aristotele e Democrito, ascoltiamo quindi dalla loro voce cosa hanno da dirci.

Aristotele Salve, sono Aristotele, colui che il vostro più grande poeta ha definito *maestro di color che sanno*. Ma non preoccupatevi! Non sciorinerò qui tutta le mie conoscenze, che vanno dalla logica alla politica, dalla fisica alla biologia, dall'astronomia all'etica e via dicendo..

Vi parlerò solo dell'assurdità di considerare l'infinito come qualcosa di "reale", cioè, come io dico, di qualcosa *in atto*. Zenone ad esempio coi suoi "ragionamenti" riesce a mettere di cattivo umore quelli che tentano di risolverli, ma in realtà si tratta di paralogismi: il tempo non risulta composto da infiniti istanti e così nessun'altra grandezza.

L'infinito, dico io, può essere concepito solo in potenza, o *per detrazione*, ipotizzando di sottrarre sempre qualcosa ad una quantità o *per aggiunzione*, ipotizzando di poter aggiungere sempre qualcosa. Ma non si può retrocedere o avanzare all'infinito, si può solo retrocedere sempre di più o avanzare sempre di più, passo per passo, e ci debbono essere necessariamente un Principio Primo e un Fine Ultimo. Chi studia geometria sa che tutta la catena dei ragionamenti parte da postulati evidenti e indimostrabili, così come il moto non può essere generato all'infinito da un altro moto, ma è necessario un Primo motore, Immobile, Dio. E così anche per il Fine ultimo, va postulato un termine, l'Assoluto o Dio. Ma vedo avvicinarsi l'ombra di Democrito, filosofo che non ho conosciuto personalmente e che fu inviso al mio maestro Platone. Rispetto alcuni aspetti del suo pensiero, ma non ho parlato molto bene di lui nelle mie lezioni, con la sua assurda teoria che le cose derivino dal caso, quindi è meglio che non mi faccia vedere

Democrito Se non sbaglio ho visto lo stagirita allontanarsi. Avrei potuto chiedergli perché a volte mi attribuisce teorie non mie ma, poco male! Non bisogna farsi travolgere dalle passioni.

Sono Democrito di Abdera, alcuni mi considerano un presocratico, forse per screditarmi: in effetti vissi contemporaneamente a Socrate. Scrissi moltissimo ma, non so perché, tutte le mie opere sono perdute (pare che non andassero bene per la nuova religione) e tutti voi ricostruite il mio pensiero da quanto riportano gli altri, che non sempre sono sinceri. Debbo al divino Lucrezio e ad Epicuro che la mia voce non si sia estinta per sempre.

Sulla questione che state trattando il mio pensiero è molto semplice: io ammetto l'infinito in matematica ma non in fisica. Credo che la realtà fisica, la materia, non possa essere un tutto continuo divisibile all'infinito, , ma sia composta da elementi ultimi non ulteriormente divisibili che chiamo atomi; la materia è quindi composta da un numero finito di pezzetti discreti e indivisibili, ognuno con una dimensione finita. Pensateci quando alla fine del vostro discorso tirerete le somme.

Terzo narratore Riannodiamo le fila del nostro discorso: a prima vista sembra che l'idea pitagorica che vedeva nella matematica la chiave della spiegazione della realtà, risulti indebolita dalle aporie individuate dei paradossi di Zenone. Invece questa idea si farà largo con prepotenza nella storia del pensiero, e trionferà nell'epoca della rivoluzione scientifica del seicento, grazie all'opera di pensatori del calibro di Galilei, Cartesio, Newton e finalmente verrà prodotta una soluzione rigorosa del paradosso zenoniano, ad opera di Newton e Leibniz, contemporaneamente ma separatamente. In effetti tra i due è sorta una poco onorevole contesa su chi sia stato il primo, ma noi non ci attardiamo in pettegolezzi, essendo interessati esclusivamente alla descrizione della soluzione e preferiamo dare la parola a uno dei due, infatti vediamo avvicinarsi Leibniz, col suo nome altisonante e quella incredibile parrucca e lasciamo a lui la parola.

Leibniz *Guten tag* signori. Sono Gottfried Wilhelm von Leibniz, filosofo e matematico tedesco. Col metodo che ho messo a punto (e che qualche calunniatore sostiene che avrei copiato da Newton) ho dato la possibilità di avvicinare la matematica alla fisica, visto che l'algebra antica studiava la realtà come se tutto fosse discontinuo, mentre invece troviamo dappertutto la continuità.

Per quanto riguarda il concetto di infinito, vi dico solo che tutta la mia filosofia tende a dimostrare che *la ragione delle cose è all'infinito necessaria*. Ma non vi parlerò della mia filosofia, delle monadi o del migliore dei mondi possibili; vi confesso solo una mia vicinanza con Parmenide, dal quale ho tratto la mia domanda filosofica fondamentale: *perché esiste qualcosa e non il nulla*? Ma sorvoliamo altrimenti , come dite voi altri napoletani, "*farcimmo notte"* e passiamo a dimostrare come si può risolvere matematicamente il rompicapo di Zenone.

Da sempre l'uomo si è posto il problema di sommare infiniti numeri e ovviamente pensare di ottenerne un numero finito potrebbe sembrare strano. Proprio la vita ci offre un semplice spunto che testimonia come *la somma di infiniti numeri può darci un numero finito.* Consideriamo ad esempio un righello lungo 20cm e dividiamolo in due parti, otterremo due parti uguali lunghe 10 cm, ora facciamo lo stesso con la seconda metà, avremo adesso 2 metà da 5 cm, continuiamo così e diremo che sarà un procedimento infinito, sommando alla fine però tutti i vari segmenti otterremo sempre un numero finito (20cm).

Sistemiamo ora la teoria in generale:

Definiamo ***successione numerica*** una corrispondenza tra l'insieme N dei naturali e l'insieme R dei numeri reali

$$\{\square_{\square}\}_{\square\square\square}$$

Definiamo ***serie numerica*** la somma degli infiniti termini di una successione e la indichiamo con la seguente scrittura:

$$\sum_{\square=1}^{+\infty} \square_{\square}$$

Il simbolo ∑ viene detto ***simbolo di sommatoria*** e fornisce un metodo comodo per indicare una serie, ma non l'unico in quanto potremo anche scrivere più semplicemente:

$\square_1 + \square_2 + \square_3 + \ldots\ldots + \square_\square + \ldots.$

Però sappiamo bene che la *somma si effettua tra un numero* ***finito*** *di addendi,* quindi la somma precedente non ha significato come somma ordinaria. Possiamo risolvere questo problema introducendo una nuova successione detta successione ***delle somme parziali*** della serie

$\square_1 = \square_1;$

$\square_2 = \square_1 + \square_2;$

$\square_3 = \square_1 + \square_2 + \square_3;$

…….

$\square_\square = \square_1 + \square_2 + \square_3 + \ldots\ldots + \square_\square$

…….

Indichiamo tale successione con $\{\square_\square\}_{\square\square\square}$,

una volta costruita si passa al limite la somma parziale n-esima per *n* che tende a +∞, e se il limite esiste si può dare un senso alla somma della serie e si pone:

$\lim_{\square\to+\infty} \square_\square = \sum_{\square=1}^{+\infty} \square_\square$

Avendo a che fare con un limite abbiamo 4 casi possibili:

1. $\lim_{\square\to+\infty} \square_\square$ è un numero reale finito che indichiamo con la lettera ***S***.

   In questo caso diremo che la serie è ***convergente*** e che la sua somma varrà ***S***;

2. $\lim_{\square\to+\infty} \square_\square=+\infty$ il limite della successione delle somme parziali è un infinito di segno positivo e la serie si dice ***divergente positivamente***;

3. $\lim_{\square\to+\infty} \square_\square=-\infty$ In questo caso la serie si dirà ***divergente negativamente;***

4. $\lim_{\square\to+\infty} \square_\square$ ***non esiste***. La serie si dirà ***indeterminata***. In questo caso non ha senso parlare di somma della serie

   4.

Consideriamo ora una particolare serie numerica la ***serie geometrica.*** Questa è una serie in cui il rapporto tra ogni termine e il suo precedente è costante, questa viene detta ragione della serie, indichiamola con la lettera q

Supponiamo, per comodità, che il primo termine della serie sia 1 allora possiamo scrivere la serie geometrica nel modo seguente

$$\sum_{\square=0}^{+\infty} \square^\square$$

la somma parziale n-esima è data da:

$$\square_\square = \sum_{\square=0}^{\square} \square^\square = 1 + \square + \square^2 + \ldots + \square^\square$$

Nel caso della serie geometrica si può facilmente dimostrare che la somma parziale n-esima si può esprimere con la formula:

$$S_n = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$$

Dunque il limite della somma parziale della serie dipende dal limite di q^{n+1} per n tendente a infinito

Sappiamo che questo limite è infinito se q $\geq$1

è zero se -1 <q <1

non esiste se q$\leq$-1

Allora, se la ragione q della serie è compresa tra -1 e 1, il limite delle somme parziali è un numero finito e risulta

$$s = \frac{1}{1-q}$$

Consideriamo ora la somma che deriva dal paradosso

10+1+0,1+0,01+0,001+.. .. .. ..

e osserviamo che la somma degli infiniti “passi” che deve compiere Achille, a parte il primo numero, è niente altro che la somma di una serie geometrica di ragione 1/10 e dunque convergente.

La somma per quanto detto prima vale

$$s = \frac{1}{1-\frac{1}{10}} = \frac{1}{\frac{9}{10}} = \frac{10}{9}$$

Dunque Achille per raggiungere la tartaruga deve percorrere la distanza S= 10+10/9

Quarto narratore E allora tutto risolto? Sembra di sì sul versante matematico. Ma la fisica contemporanea propende per un immagine della realtà che privilegia il continuo o il discreto? Se prestiamo fede al già accennato testo divulgativo di Rovelli, sembra che la visione del mondo democritea sia quella giusta. Rovelli infatti inquadra la soluzione leibniziana in un ordine di idee non lontano dal concetto aristotelico di infinito potenziale. Ritornando al paradosso di Achille e la tartaruga, Rovelli si domanda: "veramente esistono in natura intervalli tra di loro arbitrariamente corti?".

La risposta che ci dà la fisica quantistica è negativa, e lo spazio che essa definisce è di natura granulare e non continua. Allora molte domande sul rapporto tra continuo e discontinuo si ripropongono, ma nel frattempo noi abbiamo acquistato maggiore conoscenza della complessità dei problemi. Quindi, trincerandoci un poco dietro la socratica consapevolezza di "sapere di non sapere", ci apprestiamo a seguire con interesse gli interventi che seguiranno (Convegno *Due giorni per la scuola*), ringraziando tutti, nella speranza che il nostro piccolo contributo sia stato degno di un uditorio così autorevole.

Elaborato dagli studenti della 5°M e 5°N dell'ITI FERRARIS, sulla base delle lezioni tenute dai proff. Alessandra Fogliano e Giuseppe Mangione e della consultazione dei seguenti testi:

ARISTOTELE (2008), *Fisica, Libro VI,* Milano, Mondadori

CASERTANO G. (1984): *Storia delle filosofie, vol. 1,* Il tripode

GEYMONAT L. (1971), *Storia del pensiero filosofico,* Garzanti

LOMBARDO RADICE L.(1981), *L'infinito,* Roma, E. Riuniti

ROVELLI C. (2014), *La realtà non è come ci appare,* Cortina